Реферат

Захаров Павел 511.

Уравнения Лагранжа. Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.

1. Уравнения Лагранжа.

Допустим, имеется система N материальных точек, положение каждой из них характеризуется ее радиус-вектором , где обозначают координаты материальной точки, например, декартовы. Соответственно, для описания состояния системы необходимо знать значений координат — число ее степеней свободы. Обозначим первую и вторую производные радиус-вектора по времени и , которые характеризуют скорость и ускорение точки.

Однако, существует концепция обобщенных координат, используя которые можно получить более обобщенные результаты, которые будут верны и для декартовых, и для цилиндрических и других координат. Пусть - совокупности обобщенных координат, скоростей и ускорений, с компонентами , в системе с степенями свободы. Пусть изменение системы описывается связью между координатами, скоростями и ускорениями в виде уравнений движения

.

Положим, что функции разрешимы относительно ускорений — это подтверждается практикой, т. к. для определения динамики системы в краткосрочной перспективе зачастую достаточно определить скорости и положения точек системы. Тогда уравнения движений могут быть представлены в следующем виде:

.

Исходя из принципа наименьшего действия, задача сводится к минимизации интегрального функционала

,

где функция называется функцией Лагранжа этой системы, а - действие.

Относительный минимум достигается на кривой , если для любой кривой такой, что

.

Если вместо использовать функцию

,

то получается новый функционал параметра . Если существует производная

,

то она называется первой вариацией функционала. Необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его первой вариации. Тогда покомпонентно можно записать

,

т. к. . Тогда для обнуления интеграла требуется выполнения

.

Эта система — уравнения Лагранжа. Однако, для решения этой системы дифференциальных уравнений нужно определить функцию Лагранжа , а также знать начальное положение системы ( координат и скоростей).

Кроме того, функция Лагранжа обладает следующими свойствами:

* функция Лагранжа двух независимых систем равна сумме их функций Лагранжа ;
* умножение функции Лагранжа не меняет уравнений движения;
* функция Лагранжа определяется с точностью до полной производной от произвольной функции времени и координат.

Для дальнейших рассуждений нужно сделать предположение о свойствах пространства, в котором происходит движение.

2. Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.

Принцип наименьшего действия исторически рассматривался еще со времен Древней Греции, когда благодаря наблюдениям мыслители заключали, что «природа ничего не делает напрасно». Однако формализации этих принципов начали появляться гораздо позже. Так первым вариационным принципом считается принцип Ферма, описывающий преломление света, а сэр Гамильтон позднее предложил обобщенный вариационный принцип для всей механики. Математически он выражается в минимизации интегрального функционала действия из предыдущего пункта и приводит к возможности получения уравнений Лагранжа

.

Однородность пространства означает одинаковость свойств во всех точках этого пространства. Такое возможно в инерциальных системах отсчета, где все свободные объекты либо покоятся, либо движутся равномерно и прямолинейно. Это выражается в возможности осуществить перенос системы без изменения ее свойств, т. е. выполняется

.

Таким образом, функция Лагранжа оказывается независимой от , что выражается в условии

.

Тогда сумма уравнений Лагранжа приходит к выражению

.

Это означает, что величина

,

называется импульсом системы и не меняется при движении. Это выражение и называется законом сохранения импульса, а выражение для импульса имеет вид

.

Подобные выводы сделаны и для других характеристик системы и также известны как законы сохранения.